

6.1

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 10$. Yksittäisessä toistossa oikean vastauksen todennäköisyys $p = \frac{1}{2} = 0,5$.

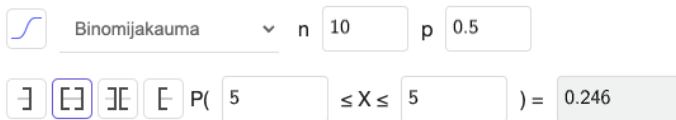
Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(10; 0,5)$.

a) Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = 10 \cdot 0,5 = 5$$

$$E(X) = np$$

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X = 5$. (Käytetään kolmen merkitsevän numeron tarkkuutta.)



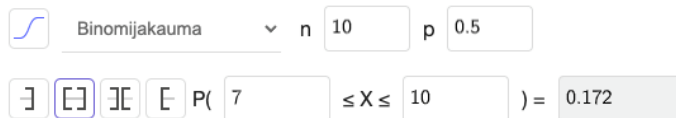
Binomijakauma n 10 p 0.5

$P(5 \leq X \leq 5) = 0.246$

$$P(X = 5) \approx 0,246$$

c) Koe hyväksytään, kun oikeita vastauksia on vähintään 7.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \geq 7$.



Binomijakauma n 10 p 0.5

$P(7 \leq X \leq 10) = 0.172$

$$P(X \geq 7) = P(7 \leq X \leq 10) \approx 0,172$$

Vastaus

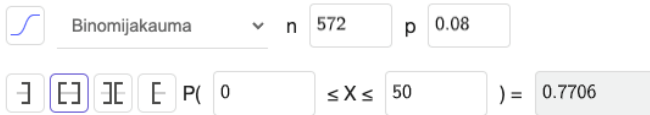
a) 5 b) 0,246 c) 0,172

6.2

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 572$. Yksittäisessä toistossa punavihersiokeuden todennäköisyys $p = 8,0 \% = 0,08$.

Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(572; 0,08)$.

- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \leq 50$.



The image shows the GeoGebra Binomial Distribution Calculator. The distribution is set to "Binomijakauma" (Binomial Distribution). The parameters are $n = 572$ and $p = 0.08$. The calculation is for $P(0 \leq X \leq 50)$, which is displayed as 0.7706 .

$$P(X \leq 50) = P(0 \leq X \leq 50) \approx 0,77$$

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \geq 50$.



The image shows the GeoGebra Binomial Distribution Calculator. The distribution is set to "Binomijakauma" (Binomial Distribution). The parameters are $n = 572$ and $p = 0.08$. The calculation is for $P(50 \leq X \leq 572)$, which is displayed as 0.2773 .

$$P(X \geq 50) = P(50 \leq X \leq 572) \approx 0,28$$

Vastaus

a) 0,77 b) 0,28

6.3

Tapahtuman voidaan ajatella olevan toistokoe, jossa on 4 toistoa.

Merkitään onnistumistodennäköisyyttä yksittäisessä toistossa kirjaimella p .

Olkoon satunnaismuuttuja

X : ”koriin saatujen heittojen lukumäärä 4 heitolla”.

Tällöin $X \sim \text{Bin}(4, p)$.

Todennäköisyys, että 4 toistosta 2 onnistuu on

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^2 = 6p^2 \cdot (1 - p)^2$$

Tiedetään, että tämä todennäköisyys on 0,25. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p .

$$6p^2 \cdot (1 - p)^2 = 0,25$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$p = -0,173... \approx -0,17 \quad \text{tai} \quad p = 0,285... \approx 0,29$$

$$\text{tai} \quad p = 0,714... \approx 0,71 \quad \text{tai} \quad p = 1,173... \approx 1,17$$

Koska todennäköisyys p toteuttaa ehdon $0 \leq p \leq 1$,
niin $p \approx 0,29$ tai $p \approx 0,71$.

Ari saa yksittäisellä heitolla korin 29 %:n tai 71 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus

29 % tai 71 %

6.4

Tapahtuman voidaan ajatella olevan toistokoe, jossa on 12 toistoa.

Merkitään onnistumistodennäköisyyttä yksittäisessä toistossa kirjaimella p .
Olkoon satunnaismuuttuja X : ”Petran voittojen lukumäärä 12 pelissä.”

Tällöin $X \sim \text{Bin}(12, p)$.

a) Todennäköisyys, että 12 toistosta 6 onnistuu on

$$P(X = 6) = \binom{12}{6} \cdot p^6 \cdot (1 - p)^6 = 924 p^6 \cdot (1 - p)^6$$

Tiedetään, että tämä todennäköisyys on 0,15. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p .

$$924 p^6 \cdot (1 - p)^6 = 0,15$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$p = -0,1953... \approx -0,20 \quad \text{tai} \quad p = 0,3717... \approx 0,37 \quad \text{tai} \\ p = 0,6282... \approx 0,63 \quad \text{tai} \quad p = 1,195... \approx 1,20$$

Koska todennäköisyys p toteuttaa ehdon $0 \leq p \leq 1$,
niin $p \approx 0,37$ tai $p \approx 0,63$.

Petra voittaa yksittäisen pelin todennäköisyydellä 0,37 tai 0,63.

b) Jos $p \approx 0,37$, niin 12 pelissä saatujen voittojen lukumäärän odotusarvo on $E(X) = np \approx 12 \cdot 0,37 = 4,44 \approx 4,4$.

Tällöin 6 voittoa on Petralle hyvä tulos.

Jos $p \approx 0,63$, niin 12 pelissä saatujen voittojen lukumäärän odotusarvo

on $E(X) = np \approx 12 \cdot 0,63 = 7,56 \approx 7,6$.

Tällöin 6 voittoa on Petralle huono tulos.

Vastaus

a) 0,37 tai 0,63

b) Jos $p \approx 0,37$, niin $E(X) \approx 4,4$; ja tulos on hyvä.

Jos $p \approx 0,63$, niin $E(X) \approx 7,6$; ja tulos on huono.

6.5

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 34$. Yksittäisessä toistossa valkoruskean koiran todennäköisyys $p = 65 \% = 0,65$.
Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(34; 0,65)$.

a) Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = 34 \cdot 0,65 = 22,1 \approx 22$$

b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \geq 17$.

Binomijakauma n 34 p 0.65

$P(17 \leq X \leq 34) = 0.9759$

$$P(X \geq 17) = P(17 \leq X \leq 34) \approx 0,98$$

Vastaus

a) 22 b) 0,98

6.6

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 13$. Yksittäisessä toistossa oikean arvauksen todennäköisyys $p = \frac{1}{3}$.

Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(13, \frac{1}{3})$.

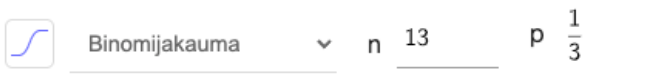
a) Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = 13 \cdot \frac{1}{3} \approx 4,33$$

Tulos tarkoittaa sitä, että jos veikkausrivejä täytettäisiin suuri määrä, niin oikeiden arvausten lukumäärän keskiarvo olisi likimain 4,33.

b) Merkintä $P(X > 6)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että oikeita arvauksia on enemmän kuin 6 eli vähintään 7. Siis oikeita arvauksia on 7, 8, 9, 10, 11, 12 tai 13.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \geq 7$.

 Binomijakauma $n = 13$ $p = \frac{1}{3}$



$P(7 \leq X \leq 13) = 0.1035$

$$P(X > 6) = P(X \geq 7) \approx 0,1035$$

Merkintä $P(X \leq 3)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että oikeita arvauksia on korkeintaan 3. Siis oikeita arvauksia on 0, 1, 2 tai 3.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \leq 3$.

 Binomijakauma ▼ n 13 p $\frac{1}{3}$



$P(\text{ 0 } \leq X \leq \text{ 3 }) = 0.3224$

$P(X \leq 3) \approx 0,3224$

Tapahtuma $X \leq 3$ on todennäköisempi.

Vastaus

a) 4,33 b) tapahtuma $X \leq 3$ on todennäköisempi

6.7

- a) Tapahtuma voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä $n = 60$.

Pojan todennäköisyys $p = 0,513$. Poikien lukumäärä X noudattaa jakaumaa $\text{Bin}(60; 0,513)$.

Tytön todennäköisyys $p = 1 - 0,513 = 0,487$. Tyttöjen lukumäärä Y noudattaa jakaumaa $\text{Bin}(60; 0,487)$.

- b) Lasketaan odotusarvot.

$$E(X) = 60 \cdot 0,513 = 30,78 \approx 31$$

$$E(Y) = 60 \cdot 0,487 = 29,22 \approx 29$$

- c) Jotta kunnassa syntyisi yhtä monta tyttöä ja poikaa, molempia on synnyttävä täsmälleen 30. Jos tyttöjä syntyy 30, niin poikiakin syntyy 30.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $Y = 30$.

 Binomijakauma v n 60 p 0.417

P(30 ≤ X ≤ 30) = 0.0444

(Huomaa, että voit laskea yhtä hyvin todennäköisyyden, että poikia syntyy täsmälleen 30.)

Vastaus

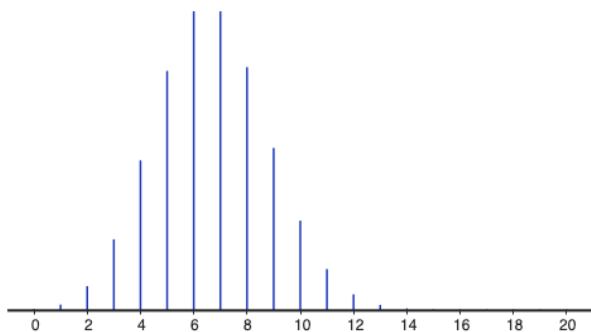
- a) Poikien lukumäärä noudattaa jakaumaa $\text{Bin}(60; 0,513)$ ja tyttöjen jakaumaa $\text{Bin}(60; 0,487)$.
- b) Poikien odotusarvo on noin 31 ja tyttöjen 29.
- c) 0,101

6.8

Tapahtuma voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä $n = 20$. Oikean vastauksen todennäköisyys yksittäisessä toistossa $p = \frac{1}{3}$. Oikeiden vastausten lukumäärä X noudattaa jakaumaa $\text{Bin}(20, \frac{1}{3})$.

- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla satunnaismuuttujan jakauma.

$\mu = 6.6667$ $\sigma = 2.1082$



Binomijakauma



n 20

p $\frac{1}{3}$

k	P(X = k)
0	0.0003
1	0.003
2	0.0143
3	0.0429
4	0.0911
5	0.1457
6	0.1821
7	0.1821
8	0.148
9	0.0987
10	0.0543
11	0.0247
12	0.0092
13	0.0028
14	0.0007
15	0.0001
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0

Jakauman perusteella todennäköisin oikeiden vastausten lukumäärä on 6 tai 7.

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \geq 12$.

 Binomijakauma v n 20 p $\frac{1}{3}$



P(12 $\leq X \leq$ 20) = 0.013

$$P(X \geq 12) = P(12 \leq X \leq 20) \approx 0,013$$

- c) Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = np = 20 \cdot \frac{1}{3} \approx 6,7$$

Vastaus

- a) 6 tai 7
b) 0,013
c) 6,7

6.9

Tarkastellaan satunnaismuuttujaa $X \sim \text{Bin}(12; 0,7)$.

a) $P(X = 8) \approx 0,2311$

 Binomijakauma ∇ n 12 p 0.7

P(8 $\leq X \leq$ 8) = 0.2311

b) $P(X \leq 8) = 0,5075$

 Binomijakauma ∇ n 12 p 0.7

P(0 $\leq X \leq$ 8) = 0.5075

c) $P(X < 10) = P(X \leq 9) \approx 0,7472$

 Binomijakauma ∇ n 12 p 0.7

P(0 $\leq X \leq$ 9) = 0.7472

d) $P(8 \leq X \leq 10) \approx 0,6386$

 Binomijakauma $\vee$ n 12 p 0.7

$P(\text{ 8 } \leq X \leq \text{ 10 }) = 0.6386$

6.10

- a) Yksittäisessä nostossa hertan todennäköisyys $p = \frac{13}{52} = 0,25$.

Siis $X \sim \text{Bin}(40; 0,25)$.

Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = 40 \cdot 0,25 = 10$$

$$E(X) = np$$

Lasketaan keskihajonta.

$$D(X) = \sqrt{40 \cdot 0,25 \cdot (1 - 0,25)} \approx 2,7 \quad D(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

- b) Yksittäisessä nostossa punaisen todennäköisyys $p = \frac{26}{52} = 0,5$.

Siis $X \sim \text{Bin}(20; 0,5)$.

Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = 20 \cdot 0,5 = 10$$

$$E(X) = np$$

Lasketaan keskihajonta.

$$D(X) = \sqrt{20 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,5)} \approx 2,2 \quad D(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

- c) Molempien satunnaismuuttujien odotusarvo on sama.
Punaisten korttien lukumäärän keskihajonta on pienempi, joten
punaisten korttien lukumäärän vaihtelu nostosarjoissa on pienempi.

Vastaus

- a) odotusarvo 10, keskihajonta 2,7
b) odotusarvo 10, keskihajonta 2,2

6.11

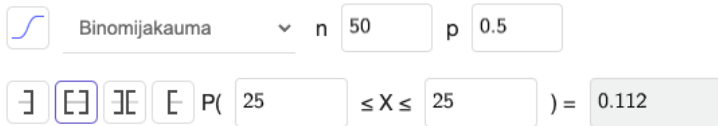
Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 50$. Yksittäisessä toistossa oikean vastauksen todennäköisyys $p = \frac{1}{2} = 0,5$.

Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(50; 0,5)$.

a) Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = 50 \cdot 0,5 = 25$$

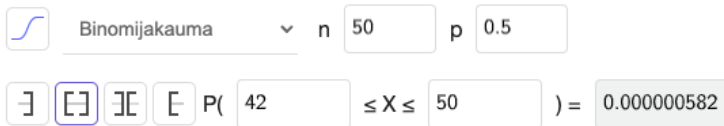
b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X = 25$. (Käytetään kolmen merkitsevän numeron tarkkuutta.)



The image shows the GeoGebra Binomial Distribution Calculator interface. The distribution is set to "Binomijakauma" with parameters $n = 50$ and $p = 0.5$. The calculation is for $P(X = 25)$, which is displayed as 0.112.

$$P(X = 25) \approx 0,112$$

c) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \geq 42$.



The image shows the GeoGebra Binomial Distribution Calculator interface. The distribution is set to "Binomijakauma" with parameters $n = 50$ and $p = 0.5$. The calculation is for $P(X \geq 42)$, which is displayed as 0.000000582.

$$P(X \geq 42) = P(42 \leq X \leq 50) \approx 0,000\,000\,582 = 5,82 \cdot 10^{-7}$$

Vastaus

a) 25 b) 0,112 c) $5,82 \cdot 10^{-7}$

6.12

Tapahtuman voidaan ajatella olevan toistokoe, jossa on 12 toistoa.

Merkitään kuutosen todennäköisyyttä yksittäisessä toistossa kirjaimella p .
Olkoon satunnaismuuttuja X : ”kuutosten lukumäärä 12 heitossa.”

Tällöin $X \sim \text{Bin}(12, p)$.

Todennäköisyys, että 12 heitolla saadaan 2 kuutosta on

$$P(X = 2) = \binom{12}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{10} = 66p^2 \cdot (1 - p)^{10}$$

Tiedetään, että tämä todennäköisyys on 0,283. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p .

$$66p^2 \cdot (1 - p)^{10} = 0,283$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$p \approx -0,0510 \text{ tai } p \approx 0,136 \text{ tai } p \approx 0,201 \text{ tai } p \approx 1,53$$

Koska todennäköisyys p toteuttaa aina ehdon $0 < p < 1$, niin
 $p \approx 0,136$ tai $p \approx 0,201$.

Silmäluvun 6 todennäköisyys yksittäisessä toistossa on 0,136 tai 0,201.

Vastaus

0,136 tai 0,201

6.13

Tapahtuman voidaan ajatella olevan toistokoe, jossa on 3 toistoa.

Merkitään onnistumistodennäköisyyttä yksittäisessä toistossa kirjaimella p .
Olkoon satunnaismuuttuja X : ”Taijan maalien lukumäärä 3 rangaistuspotkussa.”

Tällöin $X \sim \text{Bin}(3, p)$.

a) Todennäköisyys, että 3 toistosta 2 onnistuu on

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^1 = 3p^2 \cdot (1 - p)$$

Tiedetään, että tämä todennäköisyys on 0,40. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p .

$$3p^2 \cdot (1 - p) = 0,40$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$p \approx -0,32 \text{ tai } p \approx 0,54 \text{ tai } p \approx 0,78$$

Koska todennäköisyys p toteuttaa aina ehdon $0 \leq p \leq 1$,
niin $p \approx 0,54$ tai $p \approx 0,78$

Taija saa maalin yksittäisessä rangaistuspotkussa 54 %:n tai 78 %:n todennäköisyydellä.

b) Jos $p \approx 0,54$, niin 5 rangaistuspotkussa maalien odotusarvo on
 $E(X) = n \cdot p \approx 5 \cdot 0,54 = 2,7$.

Tällöin 3 maalia on Taijalle hyvä tulos.

Mikäli $p \approx 0,78$, niin 5 rangaistuspotkussa maalien odotusarvo on
 $E(X) = n \cdot p \approx 5 \cdot 0,78 = 3,9$.

Tällöin 3 maalia on Taijalle huono tulos.

Vastaus

a) 54 % tai 78 %

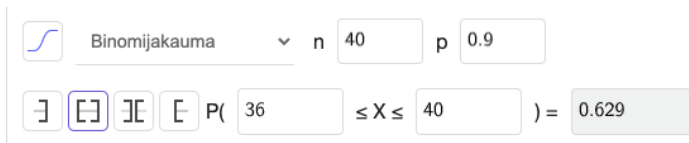
b) Jos $p \approx 0,536$, niin $E(X) \approx 2,7$; ja tulos on hyvä.

Jos $p \approx 0,782$, niin $E(X) \approx 3,9$; ja tulos on huono.

6.14

Tapahtuman voidaan ajatella oleva toistokoe, jossa on 40 toistoa. Oikeakätisyyden todennäköisyys yksittäisessä toistossa on 0,9. Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(40; 0,9)$.

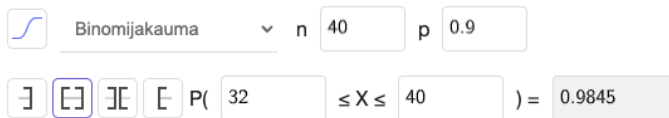
- a) Tutkitaan tapausta, jossa ainakin 90 % partiolaisista eli ainakin $0,90 \cdot 40 = 36$ partiolaista on oikeakätisiä. Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \geq 36$.



The image shows the GeoGebra Binomial Distribution Calculator interface. The distribution is set to "Binomijakauma" with parameters $n = 40$ and $p = 0.9$. The calculation is for the probability $P(36 \leq X \leq 40)$, which is displayed as 0.629. The input fields for the lower and upper bounds are highlighted with a blue border.

$$P(X \geq 36) = P(36 \leq X \leq 40) \approx 0,63$$

- b) Tutkitaan tapausta, että ainakin 80 % partiolaisista eli ainakin $0,80 \cdot 40 = 32$ on oikeakätisiä. Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \geq 32$.



The image shows the GeoGebra Binomial Distribution Calculator interface. The distribution is set to "Binomijakauma" with parameters $n = 40$ and $p = 0.9$. The calculation is for the probability $P(32 \leq X \leq 40)$, which is displayed as 0.9845. The input fields for the lower and upper bounds are highlighted with a blue border.

$$P(X \geq 32) = P(32 \leq X \leq 40) \approx 0,98$$

Vastaus

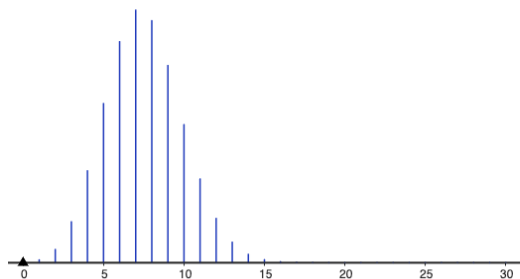
a) 0,63 b) 0,98

6.15

Tapahtuma voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä $n = 30$. Oikean vastauksen todennäköisyys yksittäisessä toistossa $p = \frac{1}{4} = 0,25$. Oikeiden vastausten lukumäärä X noudattaa jakaumaa $\text{Bin}(30; 0,25)$.

- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla satunnaismuuttujan jakauma.

$\mu = 7.5 \quad \sigma = 2.3717$



Binomijakauma $n = 30$ $p = 0.25$



$P(0 \leq X \leq 0) = 0.0002$

k	P(X = k)
0	0.0002
1	0.0018
2	0.0086
3	0.0269
4	0.0604
5	0.1047
6	0.1455
7	0.1662
8	0.1593
9	0.1298
10	0.0909
11	0.0551
12	0.0291
13	0.0134
14	0.0054
15	0.0019
16	0.0006
17	0.0002
18	0
19	0
20	0
21	0
22	0
23	0
24	0
25	0
26	0
27	0
28	0
29	0
30	0

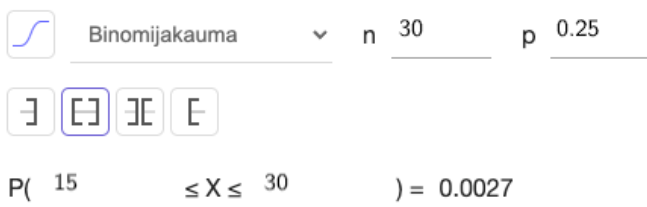
Jakauman perusteella todennäköisin oikeiden vastausten lukumäärä on 7.

b) Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = np = 30 \cdot 0,25 = 7,5$$

Yhdellä opiskelijalla on keskimäärin 7,5 oikeaa vastausta.

c) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \geq 15$.

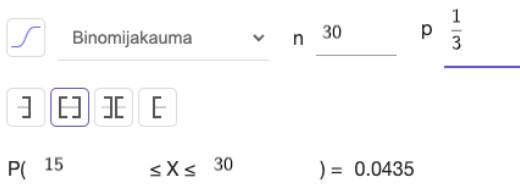
 The image shows the GeoGebra probability calculator interface. At the top, there is a dropdown menu set to "Binomijakauma" (Binomial distribution). To its right, the parameters are set to "n 30" and "p 0.25". Below these, there are four buttons: a left arrow, a double arrow (highlighted with a blue border), a right arrow, and a reset button. At the bottom, the probability calculation is shown as "P(15 ≤ X ≤ 30) = 0.0027".

$$P(X \geq 15) = P(15 \leq X \leq 30) \approx 0,0027$$

c) Oikean vastauksen todennäköisyys yksittäisessä toistossa $p = \frac{1}{3}$.

Oikeiden vastausten lukumäärä X noudattaa jakaumaa $\text{Bin}(30; \frac{1}{3})$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \geq 15$.

 The image shows the GeoGebra probability calculator interface. At the top, there is a dropdown menu set to "Binomijakauma" (Binomial distribution). To its right, the parameters are set to "n 30" and "p 1/3". Below these, there are four buttons: a left arrow, a double arrow (highlighted with a blue border), a right arrow, and a reset button. At the bottom, the probability calculation is shown as "P(15 ≤ X ≤ 30) = 0.0435".

$$P(X \geq 15) = P(15 \leq X \leq 30) \approx 0,0435$$

Vastaus

a) 7

b) 7,5

c) 0,0027

d) 0,0435

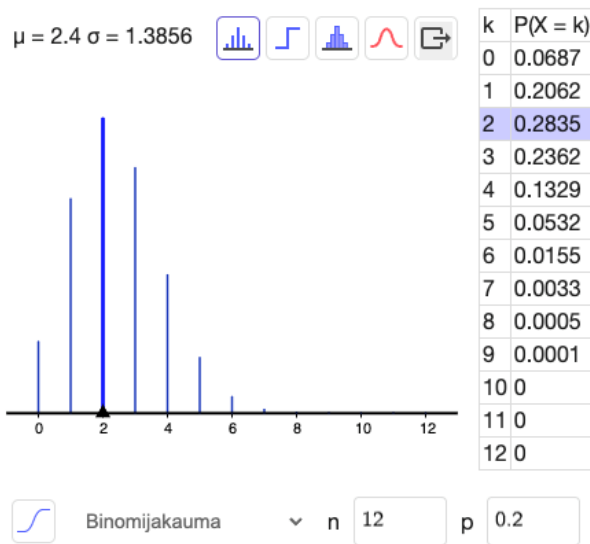
6.16

Tarkastellaan satunnaismuuttujaa $X \sim \text{Bin}(12; 0,2)$.

a) Lasketaan satunnaismuuttujan odotusarvo.

$$E(X) = 12 \cdot 0,2 = 2,4$$

b) Määritetään satunnaismuuttujan jakauma GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



Tapahtuman $X = 2$ todennäköisyys on suurin, joten satunnaismuuttujan todennäköisin arvo yksittäisessä 12 toiston sarjassa on 2.

Vastaus

a) 2,4 b) 2

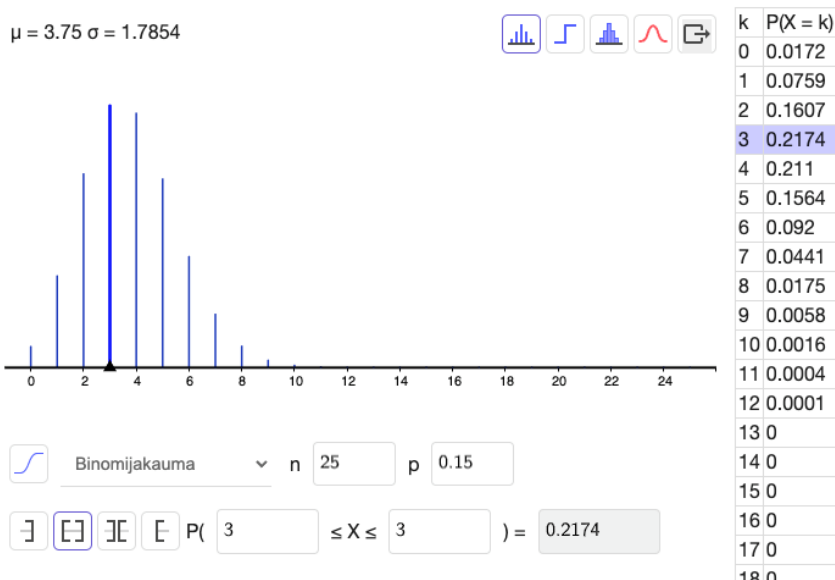
6.17

Tapahtuman voidaan ajatella olevan toistokoe, jossa on 25 toistoa. Yksittäisessä toistossa pilaantuneen omenan todennäköisyys $p = 0,15$. Tällöin $X \sim \text{Bin}(25; 0,15)$.

- a) Määritetään pilaantuneiden omenoiden lukumäärän odotusarvo.

$$E(X) = 25 \cdot 0,15 = 3,75 \approx 3,8$$

- b) Todennäköisyysjakauman moodi on se satunnaismuuttujan arvo, jonka todennäköisyys on suurin. Määritetään satunnaismuuttujan jakauma GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



Tapahtuman $X = 3$ todennäköisyys on suurin, joten pilaantuneiden omenoiden moodi on 3.

Vastaus

- a) 3,8 b) 3

6.18

- a) Tapahtuma voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä $n = 30$. Pilaantuneen omenan todennäköisyys yksittäisessä toistossa $p = 0,04$. Pilaantuneiden omenoiden lukumäärä X noudattaa jakaumaa $\text{Bin}(30; 0,04)$.

Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = 30 \cdot 0,04 = 1,2$$

$$E(X) = np$$

Lasketaan keskihajonta.

$$D(X) = \sqrt{30 \cdot 0,04 \cdot (1 - 0,04)} \approx 1,07 \quad D(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

- b) Lasketaan, kuinka monen keskihajonnan verran arvo 3 poikkeaa odotusarvosta 1,2.

$$\frac{3 - 1,2}{1,07} \approx 1,7$$

odotusarvo 1,2

keskihajonta 1,07

Arvo 3 ei ole yli kahden keskihajonnan päässä odotusarvosta, joten arvo 3 ei poikkea merkitsevästi odotusarvosta.

Lasketaan, kuinka monen keskihajonnan verran arvo 4 poikkeaa odotusarvosta 1,2.

$$\frac{4 - 1,2}{1,07} \approx 2,6$$

odotusarvo 1,2

keskihajonta 1,07

Arvo 4 on yli kahden keskihajonnan päässä odotusarvosta, joten arvo 4 poikkeaa merkitsevästi odotusarvosta.

Vastaus

- a) odotusarvo 1,2, keskihajonta 1,07
b) 3 ei poikkea, 4 poikkeaa

6.19

Tarkastellaan satunnaismuuttujia $X \sim (25; 0,40)$ ja $Y \sim (17; 0,59)$.

a) Lasketaan satunnaismuuttujien odotusarvot.

$$E(X) = 25 \cdot 0,40 = 10$$

$$E(X) = np$$

$$E(Y) = 17 \cdot 0,59 = 10,03 \approx 10$$

b) Määritetään satunnaismuuttujien keskihajonnat.

$$D(X) = \sqrt{25 \cdot 0,40 \cdot (1 - 0,40)} \approx 2,45 \quad D(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

$$D(Y) = \sqrt{17 \cdot 0,59 \cdot (1 - 0,59)} \approx 2,03$$

c) Molempien jakaumien odotusarvo on likimain sama (10). Jakauman X keskihajonta on suurempi, joten satunnaismuuttujan X arvojen heilahtelut ovat suurempia kuin satunnaismuuttujan Y arvojen.

Vastaus

a) $E(X) = 10$ ja $E(Y) = 10,03 \approx 10$

b) $D(X) \approx 2,45$ ja $D(Y) \approx 2,03$

6.20

Klaavan todennäköisyys yksittäisessä heitossa on p .

Kolikko heitetään n kertaa.

Satunnaismuuttuja X : ”saatujen klaavojen lukumäärä”.

Tiedetään, että $E(X) = np = 12$ ja $D(X) = \sqrt{np(1-p)} = 2$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan n ja p .

$$\begin{cases} n \cdot p = 12 \\ \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 2 \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n = 18 \text{ ja } p = \frac{2}{3}$$

Vastaus

$$n = 18 \text{ ja } p = \frac{2}{3}$$

6.21

Yksittäisessä pyöräytyksessä peli päättyy todennäköisyydellä $\frac{1}{5} = 0,2$.

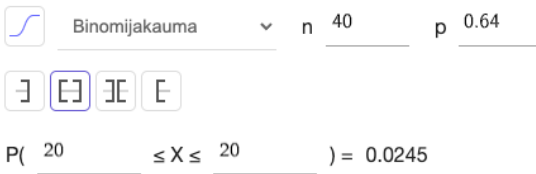
Siten peli jatkuu todennäköisyydellä $\frac{4}{5} = 0,8$.

- a) Yksittäinen pelaaja pääsee kolmannelle pelikierrokselle, jos hän pyöräyttää kahdella ensimmäisellä pelikierroksella jonkun muun kuin rosvosektorin. Lasketaan tämä todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(\text{ei rosvo JA ei rosvo}) &= P(\text{ei rosvo}) \cdot P(\text{ei rosvo}) \\&= 0,8 \cdot 0,8 \\&= 0,64\end{aligned}$$

Kun pelaajia on 40, voidaan tapahtuma ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä $n = 40$. Tapahtuman todennäköisyys yksittäisessä toistossa (yksittäisen pelaajan kohdalla) on $p = 0,64$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että täsmälleen 20 pelaajaa saa pyöräyttää onnenpyörää vähintään kolme kertaa.



Binomijakauma n 40 p 0.64

$P(20 \leq X \leq 20) = 0.0245$

$$P(20 \text{ pelaajaa}) \approx 0,0245$$

b) Lasketaan tapahtuman odotusarvo.

$$E(X) = 40 \cdot 0,64 = 25,6$$

$$E(X) = np, \\ n = 40, p = 0,64$$

Odotettavissa on, että 40 pelaajasta keskimäärin 25,6 pelaajaa saa pyöräyttää onnenpyörää vähintään kolme kertaa.

c) Yksittäinen pelaaja pääsee n :lle pelikierrokselle, jos hän on pyöräyttänyt kaikilla aiemmalla $n - 1$:llä pelikierroksella jonkun muun kuin rosvo sektorin. Tämän tapahtuman todennäköisyys on

$$P(n. \text{ kierrokselle}) = \underbrace{P(\text{ei rosvo}) \cdot P(\text{ei rosvo}) \cdot \dots \cdot P(\text{ei rosvo})}_{\substack{n-1 \text{ kpl} \\ (n-1 \text{ kierrosta})}} \\ = (P(\text{ei rosvo}))^{n-1} \\ = 0,8^{n-1}$$

Kun pelaajia on 40, n :lle pelikierrokselle pääsevien pelaajien lukumäärän odotusarvo on $E(X) = 40 \cdot 0,8^{n-1}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$40 \cdot 0,8^{n-1} = 2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx 14,42$$

Koska odotusarvo pienenee pyöräytysten lukumäärän kasvaessa, on 15. pyöräytys ensimmäinen, jolle 40 pelaajasta pääsevien pelaajien lukumäärän odotusarvo on alle 2.

Vastaus

a) 0,0245 b) 25,6 c) 15. pyöräytys